Ensembles

"Définition": Un <u>ensemble</u> est une collection E d'objets a, b, c...
appelés éléments.

- ~~On dit a=b~~ <u>égalité</u>: $a=b$ exprime le fait que a et b représentent le même élément de E.
- $a \neq b$ est la négation de l'assertion "$a=b$".
- <u>appartenance</u>: $a \in E$ exprime le fait que a est un élément de E.

On dit aussi que a appartient à E, ou E contient l'élément a.

- $a \notin E$ est la négation de l'assertion $a \in E$.

Exemples: - l'ensemble des jours de la semaine, l'ensemble des livres dans une bibliothèque, l'ensemble des éléments chimiques, l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$, entiers $\mathbb{Z}$, rationnels $\mathbb{Q}$, réels $\mathbb{R}$, complexes $\mathbb{C}$...
- il existe un ensemble qui ne contient aucun élément: l'<u>ensemble vide</u> $\emptyset$.

Axiome d'extensionnalité:

Deux ensembles E, F sont <u>égaux</u>, et on note $E=F$, si et seulement si:

$$\forall x,\ x \in E \iff x \in F.$$

Exemple: $\{n \in \underbrace{2\mathbb{N}}_{\text{pair}} : n \leq 8\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$E \neq F$ est la négation de l'affirmation "$E=F$"

Définition: Soient E, F deux ensembles. On dit que E est <u>inclus</u> dans F et on note $E \subseteq F$, si et seulement si pour tout $x \in E$ on a $x \in F$:

$$\forall x,\ x \in E \Rightarrow x \in F.$$

On dit aussi que E est un sous-ensemble de F.

L'axiome d'extensionnalité peut être interprété comme:

$$E = F \iff E \subseteq F \text{ et } F \subseteq E.$$

Exemple : • $\{0, 2, 4, 6, 8\} \subseteq \{\text{nombres pairs}\}$.

• $\forall E$ ensemble, $\emptyset \subseteq E$ ($\forall x$, $x \in \emptyset \Rightarrow x \in E$ est vrai ; car l'hypothèse $x \in \emptyset$ n'est jamais vérifiée.

• $E \subseteq E$ pour tout ensemble E. $\forall x$, $x \in E \Rightarrow x \in E$.

• $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Définition : Soient E, F deux ensembles. On note.

• $E \subsetneq F$ si et seulement si $E \subseteq F$ et $E \neq F$.

• $E \not\subseteq F$ est la négation de l'assertion $E \subseteq F$.

Parfois la notation $E \subseteq F$ est substitué par $E \subset F$.

Rmq : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$: $-1 \in \mathbb{Z}$, $-1 \notin \mathbb{N}$.

$\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$: $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$: on montrera que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$: $i \in \mathbb{C}$, $i \notin \mathbb{R}$.

Construction d'ensembles.

Si on veut développer un cadre rigoureux de la théorie des ensembles, on doit renoncer à l'idée que : "toute collection d'objets est un ensemble".

Ex : Paradoxe de Russell :

Soit $R = \{\text{ensemble } x : x \notin x\}$

$E = \{\text{ensembles}\}$ est t.q. $E \in E$ → car c'est un ensemble. donc $E \notin R$.

$F = \{\text{personnes dans cette salle}\} \notin F$, car F n'est pas une personne $\Rightarrow F \in R$.

¿ $R \in R$? si $R \in R \Rightarrow R$ est t.q. $R \notin R \Rightarrow R \notin R$

si $R \notin R \Rightarrow R$ ne satisfait pas $R \notin R \Rightarrow R \in R$

$\Rightarrow$ R n'est pas un ensemble

- En donnant la liste :

Si $n \in \mathbb{N}$, et $x_1 \dots x_n$ est un nombre (fini) n d'objets, il existe l'ensemble E qui les contient, noté $E = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Rmq : les répétitions, ni l'ordre d'éléments ne changent pas l'~~é~~ ensemble :

$\{a, b\} = \{a, a, b, b, b\} = \{b, a, b, a, a, b, a\} = \{b, a\}$.

- Par sélection (ou compréhension).

Soit E un ensemble et $P(x)$ une proposition (qui dépend de la variable x). La proposition "$x \in E$ et x vérifie $P(x)$" définit un ensemble, noté $\{x \in E \mid P(x)\}$ ou $\{x \in E : P(x)\}$

($|$ ou $:$ se lisent : tel que).

Exemples : $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

. si $a \in E$, on a $\{x \in E \mid x = a\} = \{a\}$.

. pour tout E, $\emptyset = \{x \in E \mid x \neq x\} = \{x \in E \mid 1 = 0\}$

proposition toujours fausse

. $\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$. $\quad \mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$

- Réunion

Soient E, F deux ensembles, il existe un ensemble $E \cup F$ dont tout élément est soit un élément de E, soit un élément de F. $E \cup F$ est dit la "réunion" de E et F.

Exemple : $V = \{\text{voyelles}\} = \{A, E, I, O, U, Y\}$

$E = \{0, 1, 2\}$.

$E \cup V = \{0, 1, 2, A, E, I, O, U, Y\} = V \cup E$.

Ensemble des parties d'un ensemble

Si E est un ensemble, alors il existe un ensemble $P(E)$ dont tout élément de $P(E)$ est un sous-ensemble de E :

$$P(E) = \{A \mid A \subseteq E\}$$

$P(E)$ est appelé l'ensemble des parties de E.

Rmq : - $P(E)$ n'est jamais vide (même si $E = \emptyset$), car $\emptyset \subseteq E$ et $E \subseteq E$ pour tout ensemble E.

- Il ne faut pas confondre éléments et sous-ensembles

Si x est un élément de E, ~~dans~~ ($x \in E$), alors l'ensemble $\{x\}$ est un sousensemble de E : $\{x\} \subseteq E$, et donc $\{x\}$ est un élément de $P(E)$: $\{x\} \in P(E)$.

Exemple : - $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

- $P(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$

$P(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

$P(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

$$P(P(\{a\})) = P(\{\underset{B}{\underset{\shortparallel}{\emptyset}}, \underset{A}{\underset{\shortparallel}{\{a\}}}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$$

$$= \{\emptyset, \{B\}, \{A\}, \{B, A\}\}.$$

Produit cartésien :

Déf : Soient a, b deux objets. On note (a,b) le couple (ordonné) de a et b. On dit que $(a,b) = (a',b')$ ssi $a = a'$ et $b = b'$.

Rmq : on peut représenter (a,b) par l'ensemble $\{\{a\}, \{a,b\}\}$.

Remarque: $(a,b) = (b,a)$ si et seulement si $\{a=b$ et $b=a \iff \boxed{a=b}$.

Donc si $a \neq b \Rightarrow (a,b) \neq (b,a)$. Bien sûr $(a,a) = (a,a)$.

Définition: Soient E, F deux ensembles. Alors il existe un ensemble $E \times F$, ~~alors~~ qui est formé par les couples (a,b), où $a \in E$ et $b \in F$:

$$E \times F = \{(a,b) \mid a \in E, b \in F\}$$

$E \times F$ est appelé le <u>produit cartésien</u> de E et F. On note $E \times E = E^2$

Exemples: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{R} = \{(n,x) \mid n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \{(x,n) \mid x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$

Notons que $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \neq \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, car $(1, \sqrt{2}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, mais $(1,\sqrt{2}) \notin \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

Propriétés:

- $E \times F = F \times E \iff E = F$.
- $E \times F = \emptyset \iff E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
- Si $A \subseteq E$ et $B \subseteq F \Rightarrow A \times B \subseteq E \times F$.

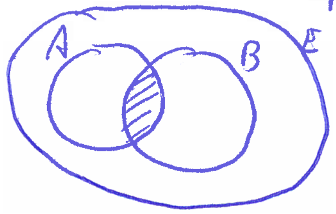
Déf: Soit E un ensemble. La <u>diagonale</u> de E^2 est le sous-ensemble $\Delta_E \subseteq E^2$ donné par

$$\Delta_E := \{(x,y) \in E \times E \mid x = y\} = \{(x,x) \in E \times E\}$$

Opérations sur les ensembles

Définition: Soient E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On définit:

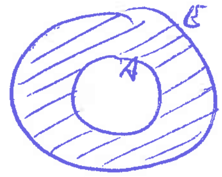
- intersection: $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$



- réunion : $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

- différence $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$

- complémentaire : $A^c = \{x \in E \mid x \notin A\} = E \setminus A$



Parfois on note $A \sqcup B = A \cup B$ si $A \cap B = \emptyset$. (réunion disjointe)

Exemples :

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \neq 0\}$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 4\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} \sqcup \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$

$\{0, 2, 4, 6\} \cup \{0, 3, 6\} = \{0, 2, 3, 4, 6\}$

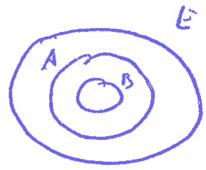
$\{0, 2, 4, 6\} \cap \{0, 3, 6\} = \{0, 6\}$

$\{0, 2, 4, 6\} \setminus \{0, 3, 6\} = \{2, 4\}$.

Rmq : le complémentaire dépend de E ! $\{0\}^c = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$, $\{0\}^c = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.

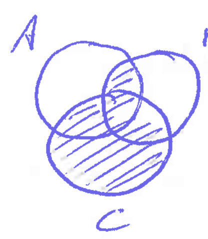
Propriétés : soit E un ensemble, et $A, B, C \subseteq E$.

- Complémentaire : $E^c = E \setminus E = \emptyset$ $\quad \emptyset^c = E \setminus \emptyset = E$.
- $E \setminus (E \setminus A) = (A^c)^c = A$
- si $B \subseteq A$, alors $E \setminus B \supseteq E \setminus A$ $\quad (B^c \supseteq A^c)$



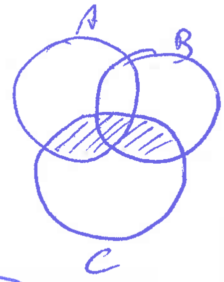
- Réunion : $A \cup B = B \cup A$. (commutativité)
- (associativité) : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C =: A \cup B \cup C$.
- (idempotence) : $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$, $A \cup E = E$.
- $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$.

- Intersection : (commutativité) : $A \cap B = B \cap A$
- (associativité) : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C =: A \cap B \cap C$.
- (idempotence) : $A \cap A = A$.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap E = A$.
- $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$.



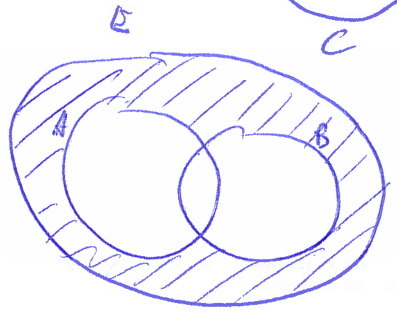
Distributivité :

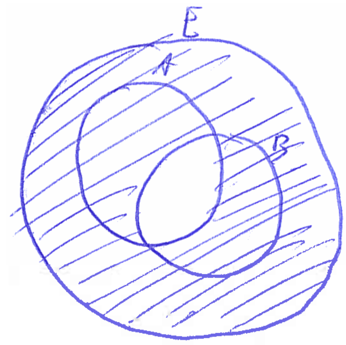
- $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$
- $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$



Lois de de Morgan :

- $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$
- $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$





Preuve (distributivité 1)

$\subseteq$ $x\in(A\cap B)\cup C \Leftrightarrow x\in A\cap B$ ou $x\in C$. $\overset{?}{\Rightarrow} x\in A\cup C$ et $x\in B\cup C$.

si $x\in A\cap B$, $\Rightarrow x\in A$ $\subseteq A\cup C$ et $x\in B$ $\subseteq B\cup C$ donc. $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$ OK

si $x\in C \Rightarrow x\in A\cup C$ et $x\in B\cup C$. OK.

2 si $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$, alors $x\in A\cup C$ et $x\in B\cup C$.

si $x\in C \Rightarrow x\in(A\cap B)\cup C$.

Supposons $x\notin C$, ~~alors~~ Car $x\in A\cup C \Rightarrow x\in A$
$x\in B\cup C \Rightarrow x\in B$ $\Rightarrow x\in A\cap B$ OK.

Preuve (lois de de Morgan 1)

1) $x\in(A\cup B)^c \Leftrightarrow x\notin A\cup B$

$x\in A^c\cap B^c \Leftrightarrow x\in A^c$ et $x\in B^c \Leftrightarrow x\notin A$ et $x\notin B$.

Mais $x\notin A\cup B \Leftrightarrow x\notin A$ et $x\notin B$. OK.

2) $x\in(A\cap B)^c \Leftrightarrow x\notin A\cap B$ $\Leftrightarrow$

$x\in A^c\cup B^c \Leftrightarrow x\in A^c$ ou $x\in B^c \Leftrightarrow x\notin A$ ou $x\notin B$ OK

Applications.

Définition : Soient E, F deux ensembles. Une <u>application</u> (ou fonction) de E dans F est une correspondance f ~~...~~ qui associe à tout point $x \in E$ un, et un seul, point $f(x) \in F$. On notera :

$$f : E \to F \qquad \left(\text{ou } \quad E \xrightarrow{f} F \right)$$
$$x \mapsto f(x) \qquad \qquad x \mapsto f(x)$$

E est l'<u>ensemble de départ</u> (ou <u>domaine</u>) de f, et F l'<u>ensemble d'arrivée</u> (ou le <u>codomaine</u>) de f.

Le <u>graphe</u> de f est le sous-ensemble ~~...~~ de $E \times F$ donné par

$$\text{Graphe}(f) = \Gamma(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in E \}.$$

Si $A \subseteq E$ est une partie de E, la restriction de f à A est l'application $f|_A : A \to F$ définie par $x \mapsto f(x)$ pour tout $x \in A$.

On dit que deux applications $f, g : E \to F$ sont <u>égales</u>, et on écrit $f = g$, si $f(x) = g(x)$ $\forall x \in E$.

Exemples : Soit E, F deux ensembles

- L'<u>application identique</u> $id_E : E \to E$, donnée par $x \mapsto x$.
  $\Gamma(id_E) = \Delta_E \subset E \times E$.
- Si $A \subseteq E$, la restriction $id_E|_A$ est appelée l'<u>inclusion canonique</u> de A dans E.

Rmq : Formellement $id_A \neq id_E|_A$ car $id_A : A \to A$ et $id_E|_A : A \to E$. Mais parfois on écrit $id_A = id_E|_A$ de même ...

- $pr_1 : E \times F \to E$ est dit la ~~...~~ 1re projection (ou projection sur le 1er facteur)
  $(x, y) \mapsto x$

  Analoguement, $pr_2 : E \times F \to F$ est la 2e projection
  $(x, y) \mapsto y$

- Soit $f : E \to F$ une application. $\sigma_f : E \to E \times F$, ~~...~~ $x \mapsto (x, f(x))$ est dit section. Si $\exists\, a \in F$, $f(x) = a$ $\forall x \in E$, f est l'application constante, et ~~A~~ $\sigma_f = \sigma_a$ est la section constante.

- Soit $A \subseteq E$. La fonction caractéristique $\chi_A : E \to \{0,1\}$ est donnée par
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

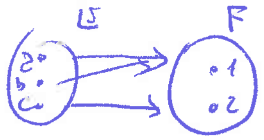
- L'application $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ qui associe à $x \in \mathbb{R}$ le plus grand $n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n \leq x$ est dite partie entière. $\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$, $\lfloor -1{,}7 \rfloor = -2$, $\lfloor 4 \rfloor = 4$.
$\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ qui associe à $x \in \mathbb{R}$ le plus petit $n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n \geq x$ est la partie entière supérieure : $\lceil 3{,}5 \rceil = 4$, $\lceil -1{,}7 \rceil = -1$, $\lceil 4 \rceil = 4$.
Props : $\lfloor x \rfloor$ est l'unique $n \in \mathbb{Z}$ t.q. $n \leq x < n+1$
$\lceil x \rceil$ " " " $n-1 < x \leq n$.

- $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z = x+iy \mapsto x = \mathrm{Re}\, z$; $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z = x+iy \mapsto y = \mathrm{Im}\, z$ sont les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe.

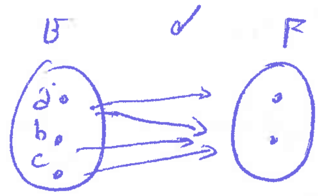
- Famille d'ensembles. $(f : I \to E)$.
Soit I un ensemble, et f une application de domaine I et t.q. $f(i) =: A_i$ est un ensemble pour tout $i \in I$.
Une telle donnée est dite famille d'ensembles, ~~aussi appelée~~ notée $(A_i)_{i \in I}$.
L'ensemble $\{x \mid \exists i : x \in A_i\} =: \bigcup_{i \in I} A_i$ est dit la réunion de la famille d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$.

~~Composition de fonctions~~

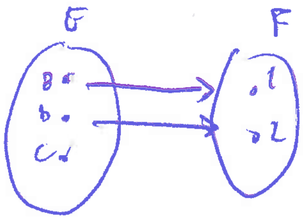
C. exemples



correspondance ← fonction
$f(a) = 1$
$f(b) = 1$
$f(c) = 2$



pas une fonction, car $f(a)$ n'est pas bien défini :
$f(b) = 2$
$f(c) = 2$
$f(a) = ?$ (1 ou 2 ?)



n'est pas une fonction, car $f(c)$ n'est pas déterminé.
$f(a)=1$ $\quad f(c)=?$
$f(b)=2$

Composition des applications

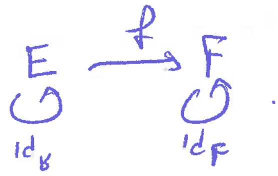
Définition. Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On note

$$g\circ f : E \to G, \quad x \mapsto g\circ f(x) := g(f(x))$$

(lu g rond f) l'application composée de f et g.

Propriétés de la composition :

~~Soient~~ - Soit $f : E \to F$. Alors $f \circ \mathrm{id}_E = f$, $\quad \mathrm{id}_F \circ f = f$



Associativité :
- $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$. $\quad (\forall\ E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H)$. On notera $h\circ g\circ f$.

Preuve. $h\circ(g\circ f)(x) = h((g\circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h\circ g)(f(x)) =$

$= (h\circ g)\circ f(x)$. $\square$

Exemples. - ~~$pr_1 \circ \sigma_f = \mathrm{id}_E$~~ Soit $f : E \to F$. Alors $pr_1 \circ \sigma_f = \mathrm{id}_E$,
$pr_2 \circ \sigma_f = f$.

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ et ~~$g : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $m \mapsto \frac{m}{2}$~~ ~~et t.q. $g|_{2\mathbb{N}}(2n) = n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.~~

~~Donc~~ $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $m \mapsto \frac{m}{2}$ est t.q. $g|_{2\mathbb{N}}(2n) = n \in \mathbb{N}$. Donc on peut voir $g|_{2\mathbb{N}} : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

et $g|_{2\mathbb{N}} \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $= \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, et $f \circ g|_{2\mathbb{N}} = \mathrm{id}_{2\mathbb{N}}$.

Ensemble des applications : Soient E, F deux ensembles. ~~Ensemble~~ Les fonctions $\{f \mid f : E \to F\}$ forment un ensemble, noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E.

~~La composition peut être vue comme~~

La composition $\circ$ peut être vue comme une fonction

$$\circ : \mathcal{F}(E,F) \times \mathcal{F}(F,G) \to \mathcal{F}(E,G)$$
$$(f\ ,\ g) \mapsto g\circ f$$